

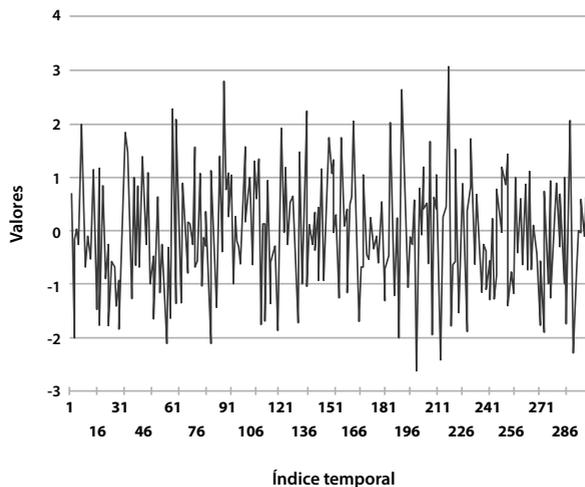
CAPÍTULO 2

SIMULACIÓN DE SERIES TEMPORALES

2.1. Proceso de ruido blanco gaussiano

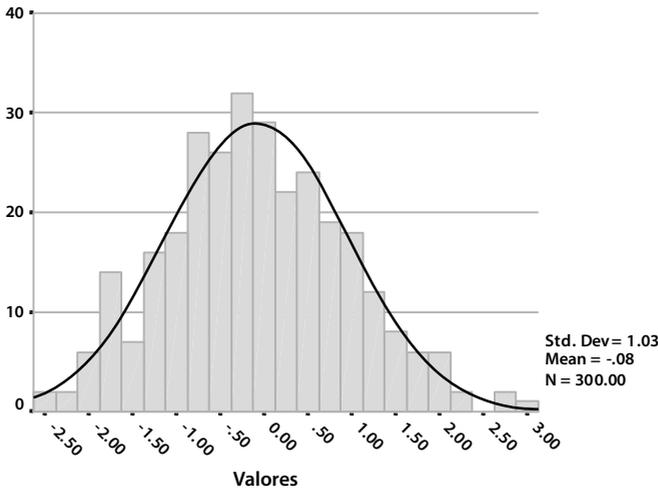
El proceso de ruido blanco es el modelo más sencillo de series temporales, consiste solamente en una serie completamente aleatoria representada, generalmente, por $\{a_t\}_T$. En la gráfica 7 se representa un ruido blanco gaussiano, con media cero y varianza 1, para un periodo de 300 puntos en el tiempo a intervalo regular.

Gráfica 7. Proceso de ruido blanco.



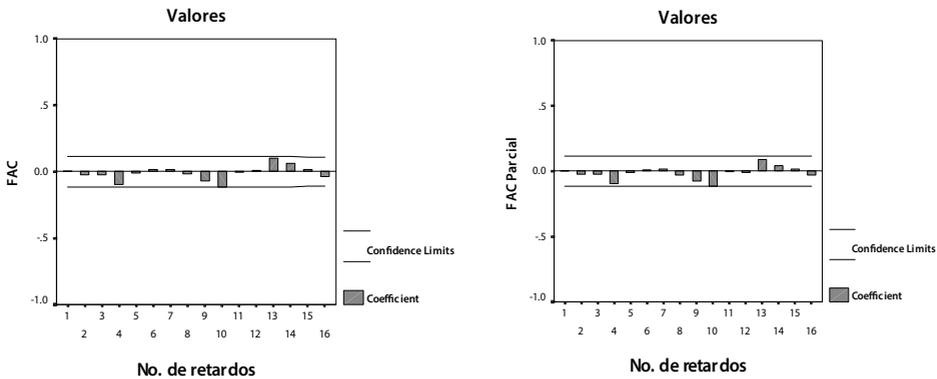
La gráfica 7 representa el proceso revisado desde el punto de vista temporal. Como era de esperarse, no se observa ningún patrón en el proceso, al tratarse de un ruido blanco. La gráfica 8 considera los valores de la serie como atemporales y permite hacer una distribución de frecuencias (de gran utilidad al momento de analizar residuales para evaluar un modelo); en ella se aprecia un buen ajuste de la curva normal a los datos simulados, así como media y varianza muestrales cercanas a los valores preestablecidos.

Gráfica 8. Distribución empírica de un proceso de ruido blanco.

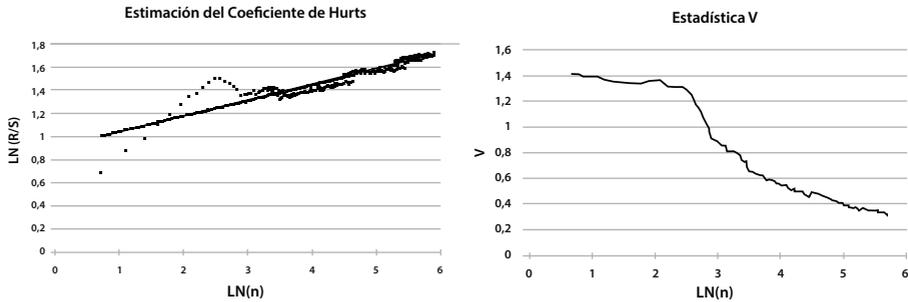


En la gráfica 9 se presentan las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial del proceso ruido blanco simulado, nótese que todos los coeficientes muestrales caen dentro de los límites críticos (intervalo de confianza) indicando así que ninguno de ellos es significativamente distinto a cero. Este comportamiento permite concluir que los valores del proceso están incorrelacionados en el tiempo, algo esperado para un proceso ruido blanco.

Gráfica 9. FAC y FACP de un proceso de ruido blanco.



Gráfica 10. Estructura fractal de un proceso ruido blanco.



En la tabla 3 se presenta la salida de la aplicación de análisis estadísticos de datos SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences*) para la estimación del exponente Hurts ilustrado en la gráfica 10 junto a la estadística para el análisis V. La estructura fractal muestra que la serie original no contiene ciclos aleatorios.

Tabla 3. Estimación de exponente Hurts para un proceso de ruido blanco.

Model Summary				
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.915 ^a	.837	.836	5.482E-02

a. Predictors: (Constant). LN(N)

ANOVA ^b						
Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	4.581	1	4.581	1.524.420	.000 ^a
	Residual	.892	297	3.005E-03		
	Total	5.473	298			

a. Predictors: (Constant). LN(N)

b. Dependent Variable: LN(R/S)

Coefficients ^a						
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	.920	.017		55.722	.000
	LN (N)	.134	.003	.915	39.044	.000

a. Dependent Variable. LN(R/S)

Exponente Hurts: $H = 0,134$. La serie es antipersistente.

Dimensión fractal de la serie temporal: $2 - 0,134 = 1,866$.

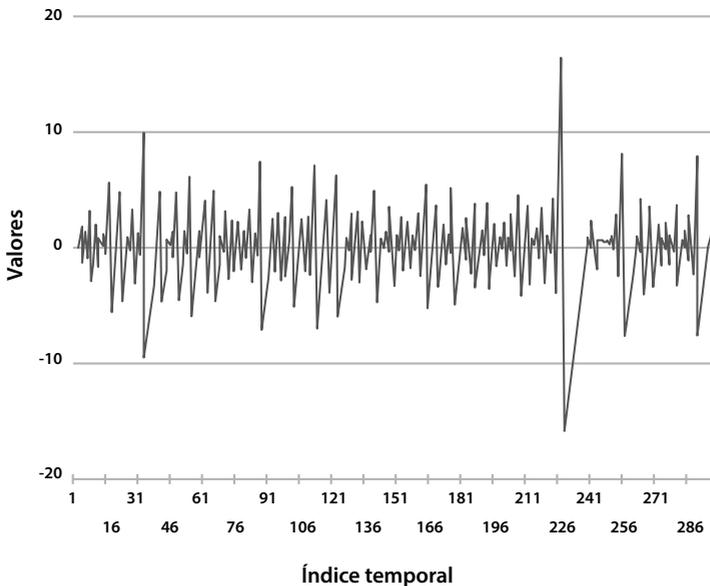
Dimensión fractal del espacio de probabilidades: $1/0,134 = 7,463$.

La serie no presenta ciclos aleatorios.

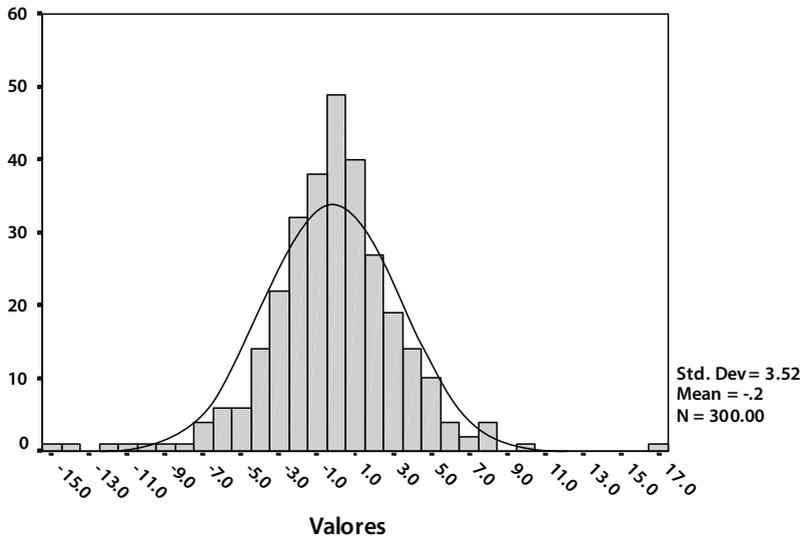
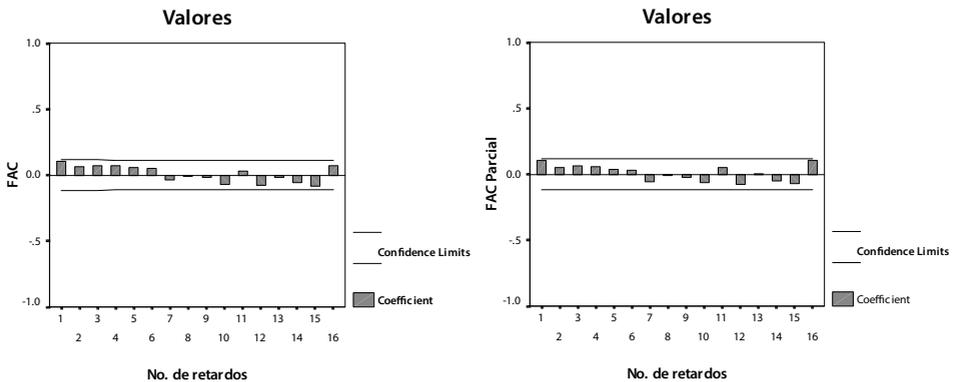
2.2. Proceso caótico

El proceso caótico se caracteriza por la no-linealidad, es altamente sensible ante pequeños cambios en las condiciones iniciales y su comportamiento es impredecible, aun cuando es de tipo determinista. En la gráfica 11 se representa un proceso caótico simulado, para un periodo de 300 puntos en el tiempo a intervalo regular.

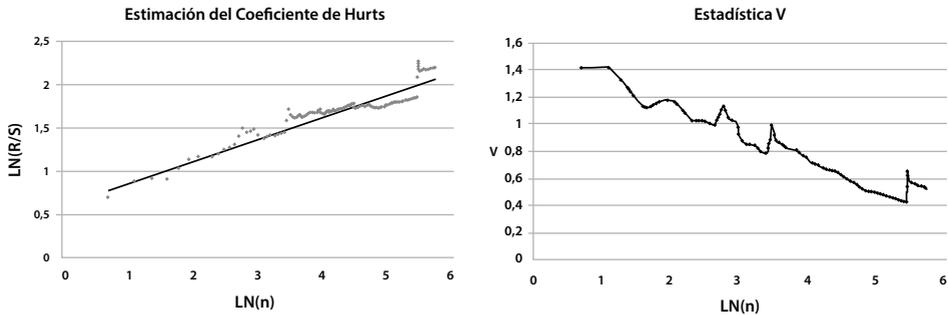
Gráfica 11. Proceso caótico.



La simulación del proceso caótico parte de la determinación aleatoria de una semilla X_0 , entre cero y uno, luego se calcula la serie de iteraciones $X_{n+1} = 4 * X_n * (1 - X_n)$, finalmente la serie caótica se obtiene mediante la transformación $\ln[X_n / (1 - X_n)]$. El resultado se aproxima a una distribución normal, pero es caótico. Nótese que la distribución de probabilidad de este proceso tiene mayor curtosis que la normal (gráfica 12).

Gráfica 12. Distribución empírica de un proceso caótico.**Gráfica 13. FAC y FACP de un proceso caótico.**

En la gráfica 13 se presentan las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial del proceso caótico simulado, nótese que todos los coeficientes muestrales caen dentro de los límites críticos (intervalo de confianza) indicando así que ninguno de ellos es significativamente distinto de cero. Este comportamiento permite concluir que los valores del proceso están incorrelacionados en el tiempo, lo cual es de esperarse para un proceso caótico.

Gráfica 14. Estructura fractal de un proceso caótico.**Tabla 4. Estimación de exponente Hurts para un proceso caótico.**

Model Summary				
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.903 ^a	.816	.816	5.482E-02

a. Predictors: (Constant). LN(N)

ANOVA ^b						
Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	17.031	1	17.031	1319.595	.000 ^a
	Residual	3.833	297	1.291E-02		
	Total	20.864	298			

a. Predictors: (Constant). LN(N)

b. Dependent Variable: LN(R/S)

Coefficients ^a						
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	.603	.034		17.641	.000
	LN (N)	.258	.007	.903	36.326	.000

a. Dependent Variable. LN(R/S)

En la tabla 4 se presenta la salida de SPSS para la estimación del exponente Hurts ilustrado en la gráfica 14. De conformidad con la estructura fractal de la serie,

presentada en la misma gráfica, es válido inferir que la serie no contiene ciclos aleatorios.

Exponente Hurts: $H = 0,258$, la serie es antipersistente.

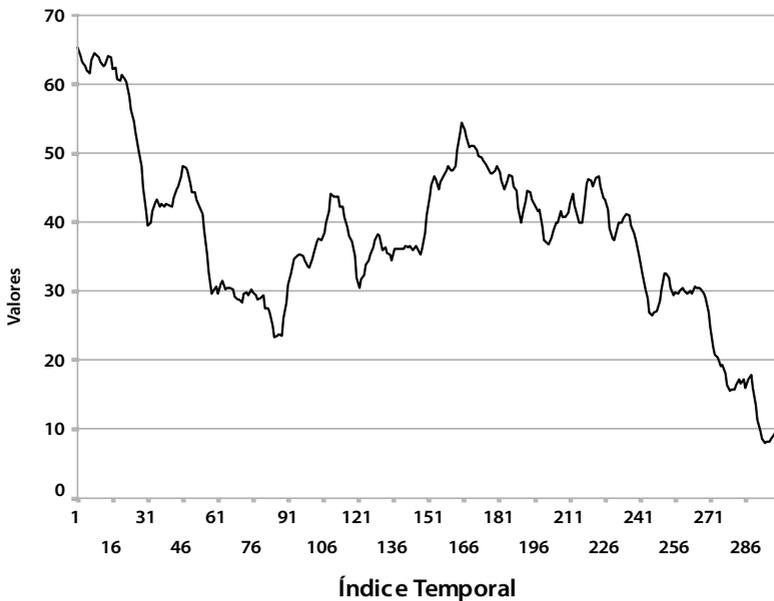
Dimensión fractal de la serie temporal: $2 - 0,258 = 1,742$.

Dimensión fractal del espacio de probabilidades: $1/0,258 = 3,876$.

La serie no presenta ciclos aleatorios.

2.3. Proceso AR(1)

Gráfica 15. Proceso simulado AR(1).

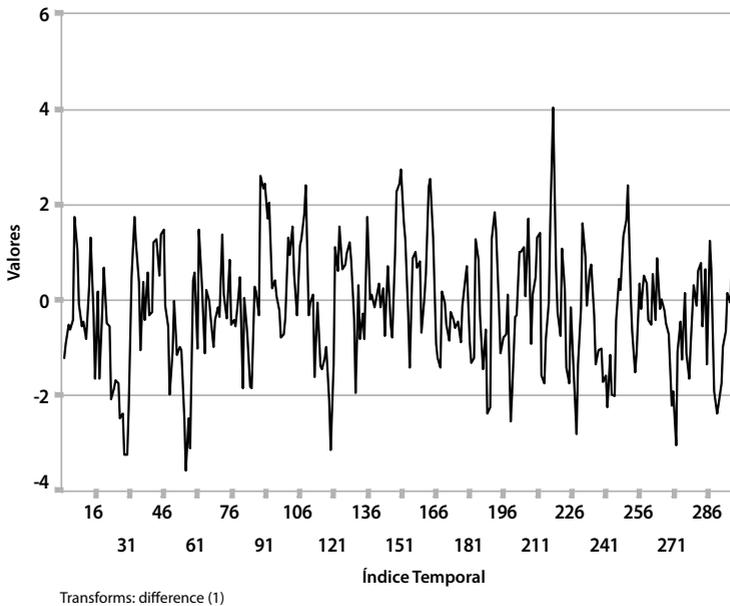


El proceso simulado, según se observa en la gráfica 15, se genera de forma tal que siga el comportamiento de un proceso autorregresivo de orden 1, AR(1), cuya función de medias es no constante. Por tanto, con el fin de obtener un proceso estacionario, antes de calcular la FAC y la FACP, se debe proceder a estabilizar el nivel antes de iniciar la identificación del modelo. Se construye entonces una nueva serie, la serie temporal en la primera diferencia, la cual se espera que sea estacionaria y definida de la siguiente manera:

$$W_t = Z_t - Z_{t-1}$$

Los valores de la serie diferenciada se muestran en la gráfica 16 y representan un proceso estacionario, ya que su media es constante e igual a cero. Un análisis visual nos permite afirmar que la varianza es constante, los valores de esta nueva serie oscilan dentro de una franja comprendida entre -4 y 4.

Gráfica 16. Proceso simulado AR(1), primera diferencia.



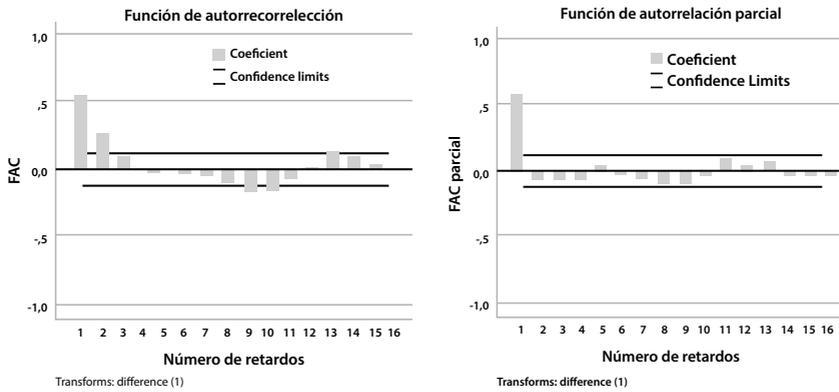
La gráfica 17 presenta las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial para el proceso AR(1) representado en la gráfica 16. Nótese que la FAC decrece, siendo significativamente distinta de cero en los tres primeros retardos, mientras que la FACP se corta después del primer retardo. Esto hace suponer que, al momento de modelar, se debe postular un modelo AR(1) para describir el proceso estocástico. Al estimar los parámetros para el proceso (en este caso, solo ϕ_1 , por tratarse de un AR(1), sin constante) se encuentra el siguiente modelo (el parámetro utilizado para la simulación fue $\phi_1 = 0.6$):

$$\check{W}_t = 0.57936 * \check{W}_{t-1}$$

Los valores de W son estimados, por ello el símbolo encima de la letra. El ruido blanco no aparece porque, en la estimación, su valor esperado debe ser cero. Para reconstruir la serie original, se reemplaza W_t por $Z_t - Z_{t-1}$, se despeja Z_t y se obtiene:

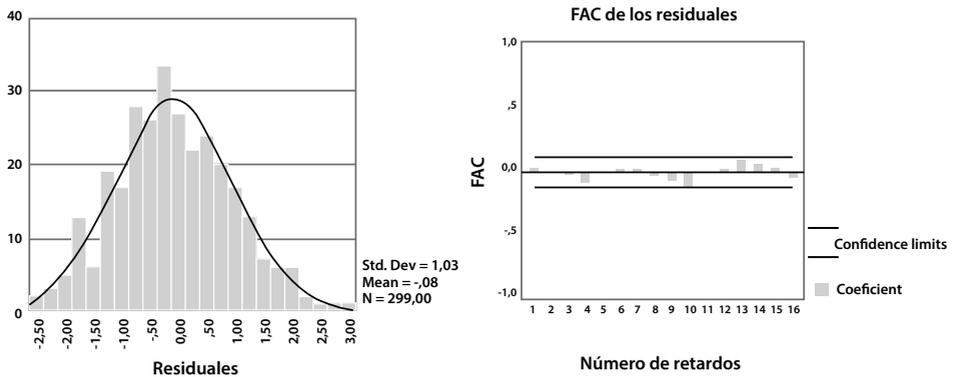
$$\check{Z}_t = 1.57936 * \check{Z}_{t-1} - 0.57836 * \check{Z}_{t-2}$$

Gráfica 17. FAC y FACP del proceso AR(1) simulado.



A continuación, se procede con la validación del modelo estimado, por tanto, deben realizarse las pruebas correspondientes con el fin de validar si cumple con las condiciones propuestas, las cuales se realizan sobre los residuales (ver sección 1.4.4.).

Gráfica 18. Análisis de residuales modelo estimado AR(1).



La gráfica 18 da indicios de que los residuales se distribuyen normalmente y están incorrelacionados. Adicionalmente, la prueba de bondad de ajuste chi-cuadrado arroja una estadística de prueba de $\chi^2=11,4$ que corresponde a un p-valor de 0,494688 (el cual es mayor que un nivel de significación de 0,05), permitiendo así tomar la decisión de que la distribución de los residuales se asemeja a una normal con media cero; esta decisión se reafirma con la estadística de Kolmogorov-Smirnov, cuyo valor es $\kappa=0,036639$, para un p-valor de 0,816992. Por otra parte, en la prueba de chi-cuadrado para incorrelación se obtuvo una estadística de prueba de $\chi^2=17,16$ (que corresponde a un p-valor de 0,578869), la tabla 5 indica que la media de los residuales es cero.

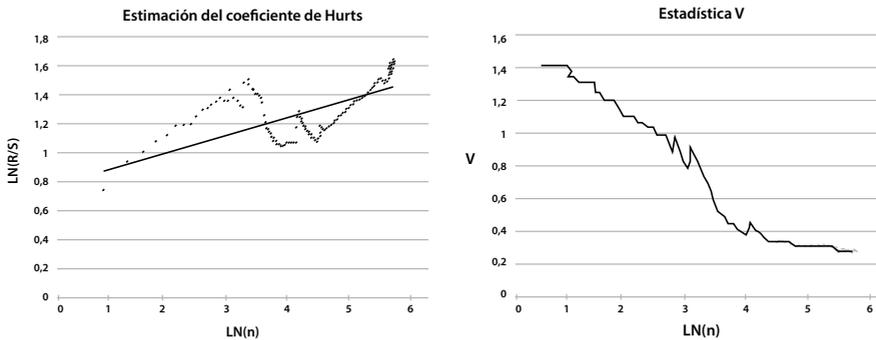
Tabla 5. Estadísticas para residuales de un proceso estimado AR(1).

One-Sample Statistics				
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
RESIDS	299	-7.99E-02	1.0257	5.932 E-02

One-Sample Test						
	Test Value = 0					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
RESIDS	-1.346	298	.179	-7.986 E-02	-.1966	3.678 E-02

Para evaluar la estabilidad de la varianza se utiliza la prueba de contraste de suma de cuadrados, la cual implica dividir la serie de residuales en tres grupos (de tamaño similar) y comparar el cuadrado medio del grupo tres con el del grupo uno; en este caso se obtiene un valor Fischer de $F=1,02377$ que permite aceptar la hipótesis de homocedasticidad de los residuales.

Gráfica 19. Estructura fractal de un proceso AR(1) simulado.



En la tabla 6, se presenta la salida de SPSS para la estimación del exponente Hurts ilustrado en la gráfica 19, allí también se presenta la información correspondiente al análisis V, gráfica en decreciente.

Tabla 6. Estimación del coeficiente Hurts para un proceso AR(1) simulado.

Model Summary				
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.682 ^a	.465	.463	.1227

a. Predictors: (Constant). LN(N)

ANOVA ^b						
Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	3.883	1	3.883	258.045	.000 ^a
	Residual	4.469	297	1.505 E-02		
	Total	8.351	298			

a. Predictors: (Constant). LN(N)

b. Dependent Variable: LN(R/S)

Coefficients ^a						
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	.735	.037		19.910	.000
	LN (N)	.123	.008	.682	16.064	.000

a. Dependent Variable. LN(R/S)

Exponente Hurts: $H = 0,123$. La serie es antipersistente.

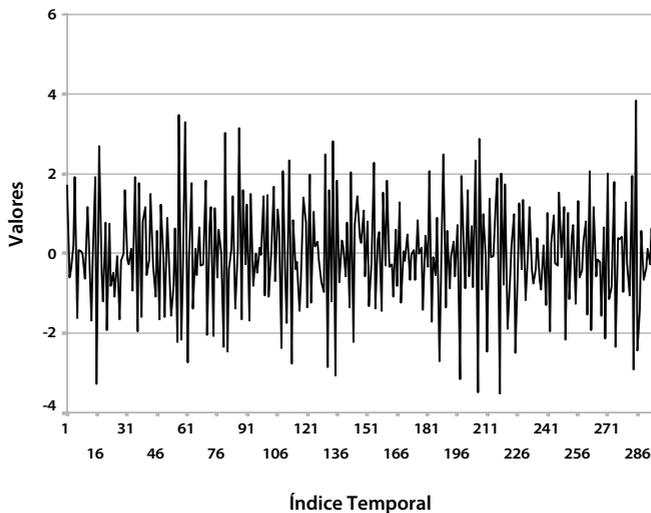
Dimensión fractal de la serie temporal: $2 - 0,123 = 1877$.

Dimensión fractal del espacio de probabilidades: $1/0,123 = 8130$.

La gráfica 19 presenta la estadística V con un comportamiento monótono decreciente (aproximado), lo cual sugiere que la serie no contiene ciclos aleatorios no periódicos.

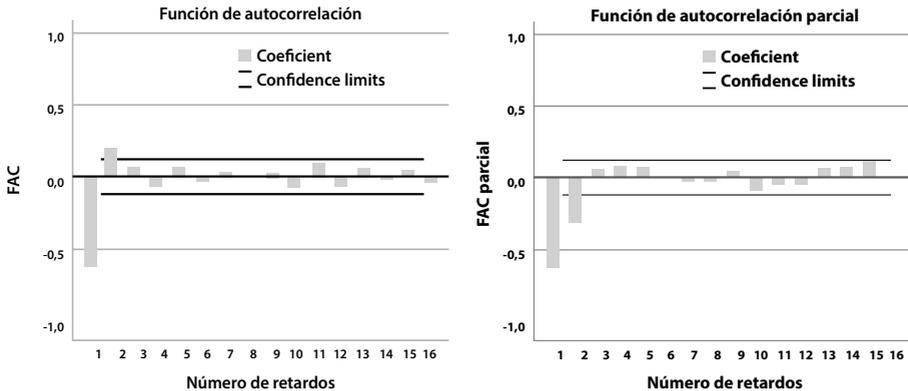
2.4. Proceso MA(2)

Gráfica 20. Proceso simulado MA(2).



El proceso simulado observado en la gráfica 20 se genera, de forma tal, que siga el comportamiento de un proceso de promedio móvil de grado 2, MA(2). La serie tiene función de medias constante e igual a cero, además, se aprecia que la varianza es constante; luego, puede inferirse que el proceso es estacionario. Por tales motivos se procede directamente a calcular sus funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, a fin de identificar el modelo.

Gráfica 21. FAC y FACP del proceso MA(2) simulado.

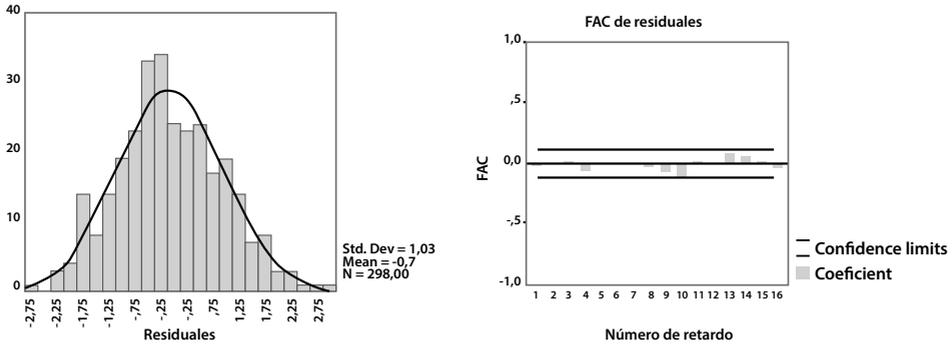


En la gráfica 21 se presentan las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial para el proceso representado en la gráfica 20. Nótese que la FAC se corta después del segundo retardo (a partir del tercer retardo es significativamente igual a cero, por ello queda dentro de la franja). La FACP, se corta después del segundo retardo, pero presenta un comportamiento decreciente. Esto hace suponer que se puede postular un modelo MA(2) para describir ese proceso estocástico, al estimar los parámetros del modelo, en este caso, θ_1 y θ_2 por tratarse de un MA(2), se encuentra el siguiente modelo:

$$\check{Z}_t = \check{a}_t - 0.77787 * \check{a}_{t-1} + 0.35292 * \check{a}_{t-2}$$

Con el fin de validarlo, deben hacerse pruebas sobre los residuales para establecer si cumplen con las condiciones propuestas en la sección 1.4.4.

Gráfica 22. Análisis de residuales modelo estimado MA(2).



La gráfica 22 da indicios de que los residuales se distribuyen normalmente y que están incorrelacionados, adicionalmente, la prueba de bondad de ajuste a una curva normal (de los residuales). Chi-cuadrado arroja una estadística de prueba $\chi^2=12,77$ que corresponde a un p-valor de 0,308047 (el cual es mayor que un nivel de significación de 0,05), esto permite decidir que la distribución de los residuales se asemeje a una normal con media cero; lo anterior se reafirma con la estadística de Kolmogorov–Smirnov, cuyo valor es $\kappa=0,0458943$, para un p-valor de 0,556789.

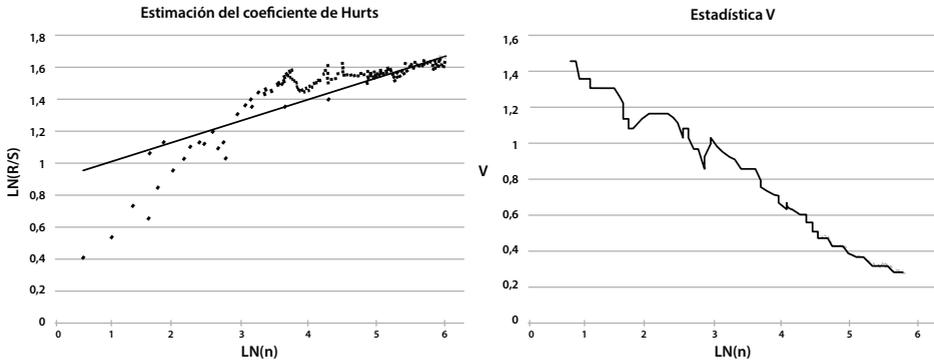
Por otra parte, los residuales están incorrelacionados (la prueba de chi-cuadrado para incorrelación arrojó una estadística de prueba de $\chi^2=12,56$ que corresponde a un p-valor de 0,81687); los resultados de la tabla 7 indican que la media de los residuales es cero. Para evaluar la estabilidad de la varianza se utiliza la prueba de contraste de suma de cuadrados que tiene un valor Fischer de $F=0,93918$, el cual permite aceptar la hipótesis de homocedasticidad de los residuales.

Tabla 7. Estadísticas para residuales de un proceso estimado MA(2).

One-Sample Statistics				
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
RESIDS	298	-6.89 E-02	1.0289	5.960 E-02

One-Sample Test						
	Test Value = 0					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
RESIDS	-1.156	297	.249	-6.890 E-02	-.1862	4.840 E-02

Gráfica 23. Estructura fractal de un proceso MA(2) simulado.



En la tabla 8 se presenta la salida de SPSS para la estimación del exponente Hurts ilustrado en la gráfica 23, en ella también se presenta la información correspondiente al análisis V, su gráfica en decreciente.

Tabla 8. Salida de SPSS.

Model Summary				
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.829 ^a	.687	.686	6.793 E-02

a. Predictors: (Constant). LN(N)

ANOVA ^b						
Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	2.989	1	2.989	647.708	.000 ^a
	Residual	1.361	295	4.614 E-03		
	Total	4.350	296			

a. Predictors: (Constant). LN(N)

b. Dependent Variable: LN(R/S)

Coefficients ^a						
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	1.054	.021		51.403	.000
	LN (N)	.108	.004	.829	25.450	.000

a. Dependent Variable: LN(R/S)

Exponente Hurts: $H = 0,108$, la serie es antipersistente.

Dimensión fractal de la serie temporal: $2 - 0,108 = 1892$.

Dimensión fractal del espacio de probabilidades: $1/0,108 = 9259$.

La gráfica 23 presenta un comportamiento monótono decreciente (aproximado), lo cual sugiere que la serie no contiene ciclos aleatorios no periódicos.

