CAPÍTULO 1

SERIES TEMPORALES

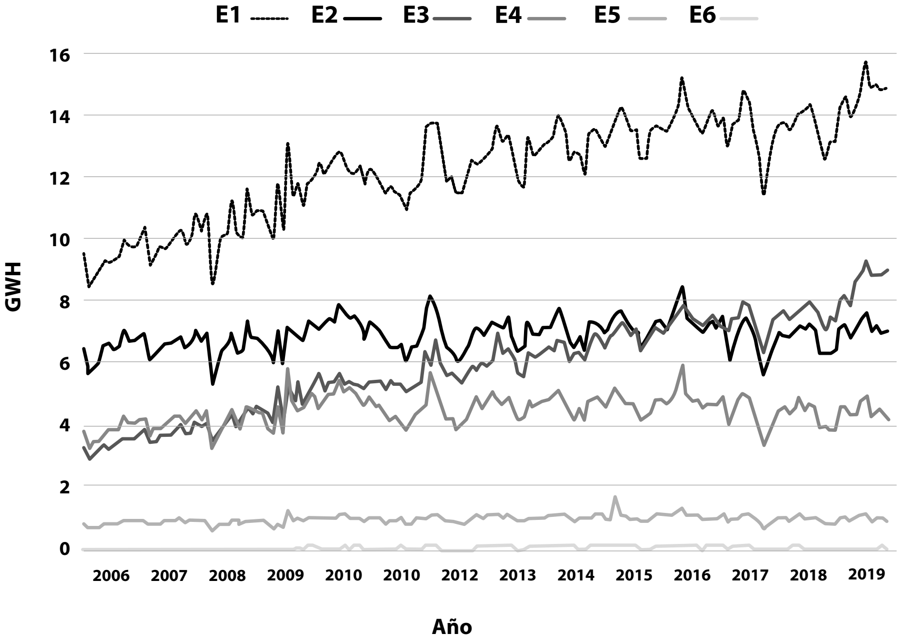
1.1. Definición

Una serie temporal, también llamada serie de tiempo o serie cronológica, consiste en un conjunto de datos provenientes de realizaciones de una variable aleatoria que se han recolectado sucesivamente en el tiempo (Peña, 1990; Peña, 2010). A manera de ejemplo, en la gráfica 1 se muestra la evolución mensual (en GWH) del consumo de energía eléctrica residencial en Cúcuta durante los últimos trece años, teniendo en cuenta los estratos socioeconómicos.

Una aproximación visual de las series permite identificar una tendencia creciente en los estratos 1 y 2, mientras que en los demás tiende a permanecer constante. El consumo varía muy poco en los estratos 5 y 6 con relación a lo observado en los demás estratos. Esto se ampliará en el capítulo 3, donde se estiman modelos para analizar esta serie.

Por otro lado, la serie temporal se compone de un conjunto de realizaciones de una variable aleatoria (Z), cada una de ellas es observada en un periodo de tiempo (t), llevando a cabo un proceso estocástico en tiempo discreto. Al valor de la variable en el periodo t se le anota Z_t, se asume que existe equiespaciamento entre las observaciones y que estas corresponden a puntos discretos en el tiempo, por eso los datos recolectados se pueden considerar sucesiones finitas de realizaciones de variables estocásticas.

Gráfica 1. Consumo de energía eléctrica residencial en Cúcuta (GWH).



Fuente: Sistema de información minero energético colombiano. SIMEC.

Serie temporal: $\{Z_t\}_T = \{Z_1, Z_2, Z_3,\ldots,Z_t,\ldots\}$

En cada periodo de tiempo se observa una sola realización de la variable aleatoria, así, por ejemplo, al observar el caudal de un río, cada día (t) tiene una variable aleatoria (Z_t) que representa el caudal del río de ese día; sin embargo, cuando este finaliza se registra un solo valor del caudal constituido como (z_t), solo queda una muestra de tamaño de uno de todos los posibles valores que hubiese podido tomar la variable aleatoria ese día. De manera similar sucede si dicha variable corresponde a las ventas diarias de un almacén de cadena, dado que al final del día se tiene una sola realización: las ventas realizadas durante la jornada (Peña, 2010; Box y Jenkins, 1969).

En consecuencia, puede afirmarse que no existe un plan de muestreo, pero se espera que la observación Z_2 esté influenciada por Z_1 y así sucesivamente, además, que cada valor Z_t incida en los valores del futuro. *A priori*, no es posible asumir independencia entre observaciones, dado que lo más probable es que los datos de una serie temporal tengan dependencia. Esto implica que estén correlacionados dos a dos, no necesariamente en forma consecutiva. Por lo anterior, se espera que el valor de la serie, en un momento del tiempo, dependa de los valores del pasado, bien sea porque son los del periodo inmediatamente anterior o de valores con varios periodos de retardo (Gao *et al.*, 2007).

El objetivo primordial del análisis de series temporales es utilizar métodos estadísticos para construir un modelo que permita describir ese conjunto de datos observados a través del tiempo, que no obedecen a ningún plan de muestreo ni a un diseño de experimentos. El proceso puede resumirse de la siguiente manera: los datos son analizados, se identifica su comportamiento, se estima un modelo que lo describa, se valida el modelo y, si es acertado, se utiliza para realizar pronósticos intertemporales (periodos futuros por ser pronosticados), es decir, para predecir los próximos valores que tomará la serie con suficiente confiabilidad; en caso contrario, se regresa a la fase de identificación.

1.2. Métodos para modelar series temporales

El análisis de series temporales, que consiste en la utilización de datos muestrales con propósitos de inferencia (estimación, toma de decisiones y predicción), resulta complejo desde el punto de vista funcional. Sin embargo, se puede identificar más como un arte que como una ciencia, aunque la mayoría de sus procedimientos están sustentados en resultados propios de la estadística–matemática que tienen validez teórica y empírica.

Especialmente, debe tenerse en cuenta que aun cuando la variable observada es la misma en cada periodo de tiempo, esta tiene una distribución de probabilidad en cada uno de esos periodos y, al observar su realización, se está examinando el valor de una muestra de tamaño uno en cada periodo. Esto es lo que genera dificultades en el análisis y modelación de series temporales.

De esta manera, la construcción de un modelo de series temporales corresponde a una estimación de sus parámetros con base en una muestra de tamaño uno; sin embargo, se ha demostrado que los diferentes modelos de series temporales se calculan mediante métodos altamente confiables. Las observaciones del fenómeno que es objeto de estudio de las series temporales, están frecuentemente correlacionadas con otra correlación que aumenta dependiendo del intervalo de tiempo entre cada par de observaciones que decrecen.

Históricamente se han desarrollado varios métodos y modelos para estimar el comportamiento intertemporal que describe una serie cronológica. En esta investigación se abordan tres de estos métodos:

- Método clásico o estructural.
- Método de Box–Jenkins.
- Método fractal.

1.3. Método estructural para el análisis de series temporales

El método clásico o método estructural para el análisis de series temporales se fundamenta en el hecho de que el conjunto de valores observados de la serie y sus variaciones se pueden explicar por medio de la interacción de cuatro elementos fundamentales que conforman su estructura (Peña, 2010; Fernández, s.f.; Alonso, s.f.):

- Tendencia a largo plazo.
- Efecto ciclo.
- Efecto estacional.
- Variación irregular.

1.3.1. Tendencia a largo plazo

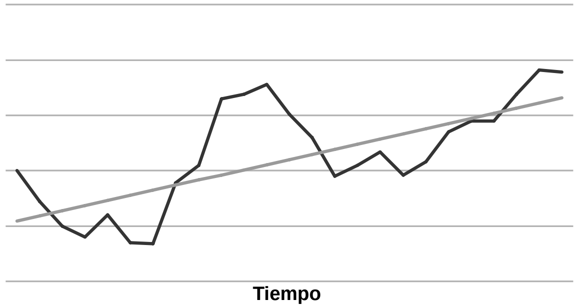
La tendencia en una serie cronológica se define como un patrón de movimiento general o persistente, ascendente o descendente, a largo plazo. Puede atribuirse a cambios tecnológicos, número de habitantes, nivel de riqueza, efecto de la competencia u otros factores que no llegan a producir cambios violentos en la variable observada, pero que sí producen un cambio gradual y estable sobre el tiempo. Su duración es de varios años.

Se modela la tendencia de la serie mediante un modelo de regresión, generalmente lineal (aun cuando este sea logarítmico o exponencial), en el cual la variable respuesta está constituida por los valores observados de la serie y la variable explicativa sea conformada por los índices asignados para la secuencia temporal. Un diagrama de dispersión temporal es conveniente para identificar el mejor modelo de regresión que describe la tendencia de la serie.

1.3.2. Efecto ciclo

El componente cíclico de la serie es también de orden sistemático, se identifica con movimientos periódicos a largo plazo que son muy suaves y tienen forma de ondas que siguen continuamente la curva de tendencia. Un ciclo normal de una serie consta de: un periodo de prosperidad (cúspide), seguido de periodos de recesión (contracción), depresión (sima) y recuperación (expansión o crecimiento), este puede durar varios años.

Gráfica 2. Variación cíclica en una serie temporal.



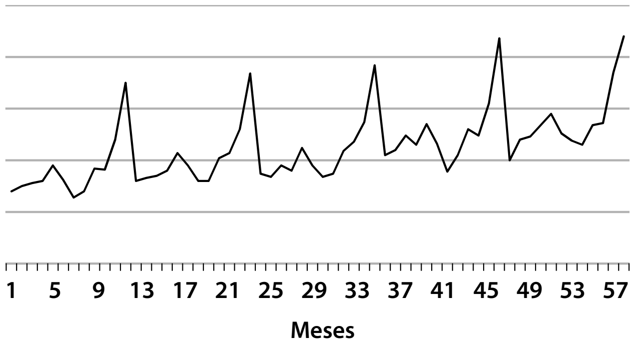
Por lo general, los efectos cíclicos pueden ser causados por cambios en la demanda de un producto o incapacidad de la oferta para satisfacerla, ciclos en los negocios o acumulación de bienes. En general, es difícil explicar cuáles son las posibles causas de dichos ciclos, hasta el punto que la gran mayoría de autores coinciden en exponer que son debido a múltiples combinaciones e interacciones de factores que influyen en el caso de las series económicas.

La construcción de un modelo para describir el comportamiento cíclico de la serie resulta bastante complejo; sin embargo, es posible darle forma gracias a la regresión sinusoidal, la cual funciona bien a mediano plazo, pero no a largo plazo, ya que las fluctuaciones cíclicas son periódicas, pero no se repiten siempre con la misma intensidad.

1.3.3. Efecto estacional

Este es un efecto sistemático caracterizado por una serie de fluctuaciones periódicas regulares que ocurren dentro de un tiempo particular en el año y que se repiten de manera similar anualmente. Su presencia se explica por las condiciones climatológicas, costumbres sociales y religiosas, entre otras.

Gráfica 3. Variación estacional en una serie temporal.



La diferencia principal entre los efectos cíclicos y los estacionales, es que estos se predicen con alta confiabilidad y ocurren en un intervalo de tiempo fijo después de la última ocurrencia, mientras que los cíclicos tienen una ocurrencia aleatoria que dificulta su predicción.

1.3.4. Variación irregular

Este componente no es sistemático y representa las fluctuaciones erráticas o residuales de la serie temporal después de haber ajustado la tendencia, el efecto cíclico y el estacional, es de corta duración y no es repetitivo. Su origen se debe a variaciones aleatorias de los datos y a la presencia de otros efectos que no son considerados en el modelo debido a que su influencia en el valor de la serie es poco relevante. Cuando se ha ajustado un buen modelo para describir el comportamiento de las variables sistemáticas, se espera que los valores de dicha variación presenten un comportamiento aleatorio.

1.3.5. Construcción del modelo

Existen dos modelos que pueden construirse con esta metodología, estos son, primero: el aditivo, el cual asume que los valores observados en las realizaciones de la serie temporal son el resultado de la adición de los cuatro componentes mencionados anteriormente. Sin embargo, este modelo se usa preferentemente para series observadas anualmente, por lo tanto se prescinde del componente estacional, utilizando así solo tres componentes. La ecuación que describe el modelo aditivo es:

$$Z_t = T_t + C_t + I_t$$

Donde Z_t es el valor observado de la serie en el periodo de tiempo t, T_t, C_t e I_t son los valores de la tendencia, el ciclo y el componente irregular en dicho periodo t, respectivamente. El segundo es el modelo multiplicativo, que explica las realizaciones de la serie mediante el producto de los cuatro componentes. Este modelo se utiliza, generalmente, para modelar series temporales en las que está presente el componente estacional; se representa mediante la siguiente ecuación:

$$Z_t = T_t * C_t * S_t * I_t$$

En la cual Z_t es el valor observado de la serie en el periodo de tiempo t, T_t, C_t, S_t e I_t, son los valores de la tendencia, el efecto ciclo, el efecto estacional y la variación irregular en ese periodo t, respectivamente. En ambos casos, el procedimiento para ajustar el modelo consiste en aislar cada uno de los efectos y modelarlo por separado; posteriormente, se realiza el pronóstico de cada componente y al final se agregan dichos valores según la función específica, con el fin de obtener el valor pronosticado para futuras realizaciones de la serie.

1.4. Método de *Box* y *Jenkins* para el análisis de series temporales

En 1969, George Box y Gwilym Jenkins, desarrollaron una nueva metodología para el análisis de series temporales. El procedimiento, denominado como Box–Jenkins, ha demostrado ser una técnica altamente eficiente para dicho análisis en situaciones en que el patrón de la serie es muy complejo y difícil de desentrañar (Box y Jenkins, 1969; Nova, 2013).

La técnica ajusta a la serie temporal un Modelo Autorregresivo Integrado de Promedio Móvil (ARIMA, por sus siglas en inglés) identificado a partir de la función de autocorrelación de la serie, cuyo componente autorregresivo explica el valor observado de la serie en función de los datos obtenidos en el pasado y el componente de promedio móvil involucra los términos de error pasados y presentes.

1.4.1. Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias:

$$\{Z_t\}_{t\geq 1}$$

En este trabajo se consideran solamente procesos estocásticos discretos, por cuanto las observaciones se hacen en intervalos discretos en el tiempo. Desde este punto de vista, una serie se considera una "realización" de un proceso estocástico. En cada periodo está definida una variable aleatoria (cada una de ellas con su correspondiente varianza y valor esperado). La distribución de probabilidad de la variable aleatoria puede ser diferente cada momento, en ella se observa, en un tiempo determinado, el valor de su realización que en conjunto constituye la serie temporal.

Funciones determinísticas especiales para un proceso estocástico

Para un proceso estocástico $\{Z_t\}_t$, se pueden definir las siguientes funciones que resultan ser determinísticas (debe tenerse en cuenta que el proceso es el aleatorio):

- Función de medias: $\mu(t) = E(Z_t)$, para todo t.

  A cada punto en el tiempo se le asigna el valor esperado de la variable aleatoria.

- Función de varianzas: $\sigma^2 = Var(Z_t)$, para todo t.

  A cada punto en el tiempo se le asigna la varianza de la variable aleatoria.

- Función de covarianzas: $c(t_1, t_2) = Cov(Z_{t1}, Z_{t2})$, para todo t_1 y t_2.

- Función de autocorrelación (FAC):

$$\rho = \frac{c(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)^*\sigma(t_2)}$$

A cada par de puntos en el tiempo t_1 y t_2, se le asigna la correlación entre las dos variables aleatorias correspondientes a esos periodos. La autocorrelación mide el grado de asociación entre valores, en una serie temporal, separados por algún retardo determinado. Así, por ejemplo, en la serie 17, 18, 19, 15, 12, 10, 8, la autocorrelación de retardo 2 es la correlación entre los pares de puntos (17,19), (18,15), (19,12), (15,10), (12,8).

- Función de Autocorrelación Parcial (FACP): presenta ciertas características que dependen del orden del proceso y del tipo de parámetros involucrados. Trata de medir la contribución del valor observado del proceso en un periodo específico del pasado para explicar dicho valor, que está en análisis, dada cierta información del proceso.[1]

La función de autocorrelación determina la estructura del proceso estocástico y por ende la de la serie cronológica, asimismo es, en cierta forma, una medida de la memoria del sistema que se esté analizando. Las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial son de gran utilidad al momento de identificar el modelo que describe el comportamiento del proceso.

1.4.2. Procesos estacionarios

Un proceso estocástico $\{Z_t\}_t$ es estacionario, en sentido estricto, si las distribuciones de probabilidad conjunta de las variables aleatorias del proceso: $Z_{t1}, Z_{t2}, \dots, Z_{tm}$ y $Z_{t1+k}, Z_{t2+k}, \dots, Z_{tm+k}$, son iguales para todo entero positivo m, para todo entero k y para todo $t_1, t_2, \dots, t_m$.

Por ejemplo, si m=3 y k=2, el concepto de estacionaridad estricta implica que la distribución de probabilidad conjunta de Z_1, Z_2 y Z_3 es igual a la distribución de probabilidad conjunta de las variables Z_3, Z_4 y Z_5. En términos prácticos, se utiliza el concepto de proceso estacionario, en sentido débil, al momento de analizar una serie temporal.

1 La definición de la función de autocorrelación parcial escapa al nivel de este trabajo; sin embargo, su cálculo se realizará mediante la utilización de paquetes estadísticos.

Un proceso estocástico $\{Z_t\}_t$, es estacionario, en sentido débil, si:

- La función de medias es constante.
- La función de varianzas es constante.
- La función de covarianzas depende solamente del retardo (diferencia entre los dos índices temporales): $c(t_1, t_2) \equiv c(|t_2-t_1|)$.

En este caso, la función de autocorrelación dependerá únicamente del retardo y se notará así: ρ_k

$$\rho_k = \rho(t,t + k)$$

Se dice que un proceso estacionario es *ruido blanco* si tiene función de medias y de autocorrelación idéntica igual a cero o función de varianzas constante.

1.4.3. Modelo ARIMA

Los modelos ARIMA se caracterizan por ser el agregado entre dos componentes del modelo, una parte autorregresiva y una parte de promedio móvil. El término integrado está relacionado con el número de diferenciaciones requeridas para estabilizar el promedio (Peña, 1990; Box y Jenkins, 1969; Gras, 2001).

1.4.3.1. Modelo autorregresivo

Un proceso autorregresivo de orden p, explica el valor actual obtenido en la serie temporal como combinación lineal de los valores precedentes más un componente aleatorio. Cuando es de orden p, AR(p) se moldea mediante la siguiente expresión:

$$Z_t = c\mu + \varphi_1 Z_{t\text{-}1} + \varphi_2 Z_{t\text{-}2} + ... + \varphi_p Z_{t\text{-}p} + a_t$$

Allí, μ representa la media del proceso, los parámetros son ϕ_i, los cuales, a su vez, se estiman a partir de los datos muestrales y $\{a_t\}$ es un ruido blanco. El proceso autorregresivo expresa el valor de la variable dependiente Z_t en el periodo de tiempo t, como una función sujeta a sus valores, observados en el pasado, y no como una sucesión de variables independientes, como sí lo hace el modelo de regresión lineal. Por otro lado, estos procesos se caracterizan por tener mucha memoria, lo cual, implica que, valores observados con bastante antelación, pueden incidir en el valor actual de la serie.

1.4.3.2. Procesos de promedio móvil

Los modelos de promedio móvil, *Movil Average*, fueron introducidos por Yule en 1926 y Slutzky en 1927. Su idea básica consiste en representar los valores de un proceso estacionario $\{Z_t\}$, cuyas cifras pueden ser dependientes unas de otras como una suma finita ponderada de choques aleatorios independientes $\{a_t\}$. Es posible moldear un proceso de promedio móvil de orden q, MA(q), mediante la siguiente expresión:

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

En ella, $\{a_t\}$ es un proceso ruido blanco y los θ_i son parámetros del modelo estimados a partir de la muestra. A su vez, los procesos de promedio móvil tienen una memoria muy corta, por ello los modelos adquieren utilidad cuando el valor de la serie de un periodo de tiempo dado depende de unos pocos valores que lo preceden.

1.4.3.3. Procesos ARIMA (p,d,q)

Se dice que un proceso estacionario sigue un modelo autorregresivo integrado, de promedio móvil, cuando tiene un componente autorregresivo de orden p junto con un componente de promedio móvil de orden q; d representa el número de diferenciaciones que se deben hacer para estabilizar el promedio del proceso. Cuando dicho promedio no requiere ser estabilizado el proceso sigue u n modelo ARMA. En la tabla 1 se resumen las ecuaciones que describen cada uno de los modelos descritos para series temporales univariadas.

Tabla 1. Modelos de series temporales univariadas.

Modelo estructural		Modelos AR y MA	
Modelo aditivo	$Z_t = T_t + C_t + S_t + I_t$	AR(p)	$Z_t = c\mu + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_p Z_{t-p} + a_t$
Modelo multiplicativo	$Z_t = T_t * C_t * S_t * I_t$	MA(q)	$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$
Modelo ARIMA			
El Modelo ARIMA involucra los componentes autorregresivos y de promedio móvil, previo establecimiento de que la serie es estacionaria o que se han realizado las transformaciones necesarias para obtener estacionariedad.			
ARIMA(p,d,q)	$Z_t = c\mu + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2}, \dots, \theta_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$		

1.4.3.4. Comportamiento típico de la FAC y la FACP

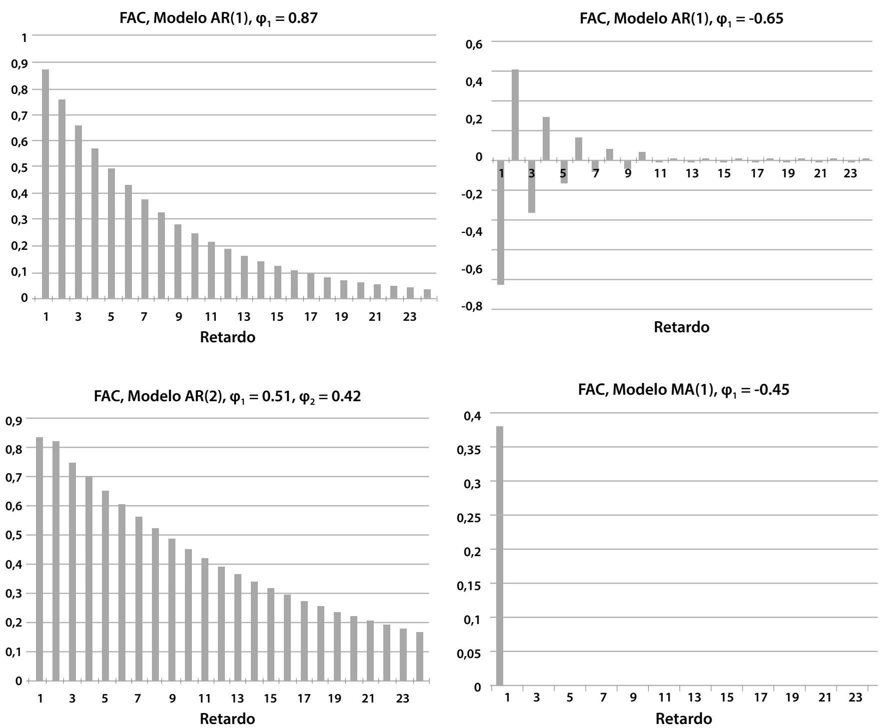
Los comportamientos típicos que presentan las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial según el tipo de modelo que describa el proceso estocástico se presentan en la tabla 2. Esta información es de gran utilidad al momento de identificar el modelo ARIMA que se ajusta a la serie.

Tabla 2. Comportamiento de las funciones FAC y FACP.

Comportamiento de la FAC y la FACP para procesos AR, MA y ARMA		
Proceso	Función de Autocorrelación - FAC	Función de Autocorrelación Parcial - FACP
AR(p)	Convergencia a cero: las autocorrelaciones forman una sucesión infinita que decrece con el retardo como mezcla de exponenciales y senoidales.	Solamente las primeras p, autocorrelaciones parciales son distintas de cero.
MA(q)	Solo las primeras q autocorrelaciones son distintas de cero.	Sucesión infinita convergente a cero. Las autocorrelaciones forman una sucesión infinita que decrece con el retardo como mezcla de exponenciales y senoidales.
ARMA(p, q)	Comportamiento irregular de las primeras q autocorrelaciones, después se forma una sucesión convergente a cero.	Sucesión infinita convergente a cero.

La función de autocorrelación es la transformada del matemático Joseph Fourier del espectrograma de la serie. Este último presenta mayor información acerca de la memoria del proceso, pero por su dificultad para calcularlo se acostumbra a utilizar la FAC, que es equivalente. A manera de ilustración, en la gráfica 4, se presentan las funciones de autocorrelación para algunos modelos ARMA.

Gráfica 4. Simulación de FAC para procesos ARMA.



1.4.3.5. Procesos no estacionarios

Un proceso estocástico no es estacionario cuando ocurre al menos una de las siguientes situaciones:

- El nivel (función de medias) no es constante.
- La varianza del proceso no es constante.

Para ajustar un modelo ARMA a un proceso estocástico se requiere que este sea estacionario. Si no lo es, deben aplicarse transformaciones a los datos a fin de conseguir la estacionaridad.

Estabilización de la varianza

Para estabilizar la varianza se puede utilizar el procedimiento de Box y Cox, que consiste en modificar la serie aplicando la transformación T_λ de la siguiente manera:

$$T_\lambda(Z_t) = \begin{cases} \dfrac{(Z_t - \alpha)^\lambda}{\lambda}; \lambda \neq 0 \\ Log(Z_t - \alpha); \lambda = 0 \end{cases}$$

Donde α se escoge de tal manera que si Z_t toma valores negativos, Z_t-α sea mayor que cero para todo t.

El valor de λ se puede hallar usando cualquiera de los siguientes métodos:

- Ensayo y error: se prueba con diferentes valores de λ hasta conseguir estabilidad en la varianza. Este método es subjetivo y bastante arriesgado para los propósitos deseados.
- Con un experto en la materia, que generalmente está relacionado con la fuente de los datos, así se indicará un valor conveniente para λ. También es un método subjetivo.
- Usando un procedimiento de máxima verosimilitud, conjuntamente con la estimación de los parámetros del modelo.
- Guerrero (2003), propone un buen método que será empleado en este trabajo cuando sea necesario.

Estabilización del nivel

Una vez estabilizada la varianza, el nivel de la serie, se establece gracias a diferenciaciones sucesivas en ella, hasta encontrar una función de medias constante; para esto se obtiene una nueva serie así:

$$\nabla^{d} Z_t = Z_t - Z_{t-d}$$

1.4.3.6. Procesos estacionales

Un proceso estocástico es estacional si su función de medias presenta el comportamiento de una onda. Generalmente, en series económicas, la estacionalidad es temporal y se repite periódicamente año tras año. En estos procesos, las funciones de autocorrelación tienen el problema de que, no solo reflejan la correlación entre periodos consecutivos, sino también la correlación entre dos periodos estacionales. El modelo que se construye sigue la misma metodología propuesta por Box y Jenkins, pero debe abordarse desde dos puntos de vista:

- Intra–estaciones: se observa el comportamiento de la función de autocorrelación como si no hubiese estaciones.
- Entre–estaciones: se observa la función de autocorrelación en los retardos estacionales.

El análisis precedente lleva a la formulación de un modelo “compuesto”, que involucra la estimación de parámetros no estacionales y estacionales de acuerdo con los modelos identificados desde los puntos de vista mencionados. Este es: ARIMA$(p, d, q)_x(P, D, Q)_s$, en el cual p y q representan los órdenes de los polinomios autorregresivos y de promedio móvil de la componente no estacional, y P y Q corresponden a los órdenes de los polinomios estacionales autorregresivos y de promedio móvil, respectivamente. El nivel se estabiliza mediante *d*, diferenciaciones no estacionales y *D* diferenciaciones estacionales. La longitud de la estacionalidad se representa por *s*.

1.4.3.7. Datos faltantes

Es posible que en una serie temporal se presenten datos faltantes, los cuales, usualmente, es imposible recuperar debido a que no se puede repetir el pasado (por ejemplo, si un día determinado no se registró la cantidad de lluvia caída sobre una región). En este caso es necesario realizar una buena estimación de los datos faltantes de la serie. Peña y Maravall (1991), Nieto y Martínez (1994) y Gallardo y Nieto (1996); entre otros, han formulado modelos y procedimientos para la estimación de datos faltantes en series temporales.

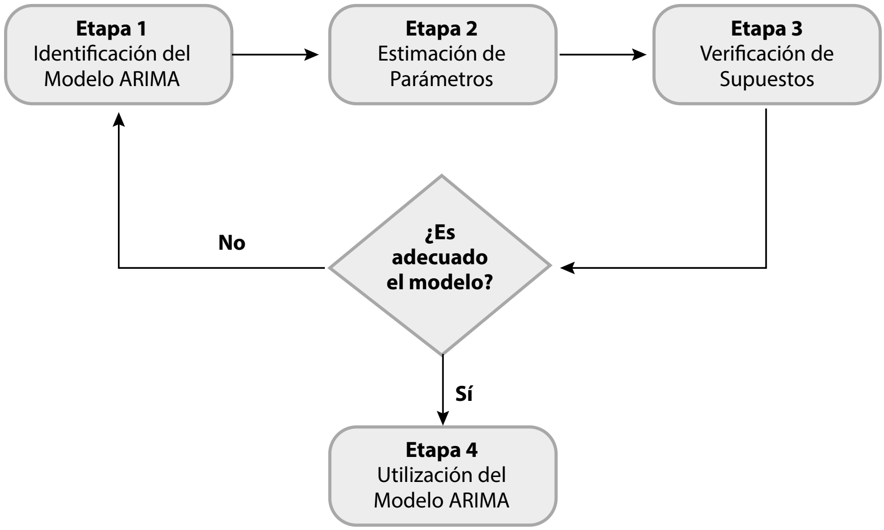
1.4.4. Construcción de modelos para series univariadas

La estrategia desarrollada por Box y Jenkins (1969) para la construcción de modelos de series temporales univariadas se puede resumir en las siguientes cuatro etapas:

- Etapa 1: identificación de un posible modelo dentro de la clase de ARIMA(p,d,q) x$(P,D,Q,)_s$; es decir, determinación de los valores p, d, q, P, D, Q y s que especifiquen el modelo ARIMA apropiado para la serie en estudio, posteriormente, se lleva a cabo a partir de la observación de las funciones de autocorrelación, autocorrelación parcial y comparación de estas con los modelos teóricos. Previamente, debe verificarse que el proceso sea estacionario; de lo contrario, estabilizar la varianza y el nivel antes de estimar la FAC y la FACP.
- Etapa 2: estimación de los parámetros involucrados en el modelo a través de técnicas de estimación no lineal. Una vez identificado el modelo, se procede a estimar los correspondientes parámetros. La técnica utilizada, generalmente, es la de máxima verosimilitud, que viene incorporada a la mayoría de los paquetes computacionales.
- Etapa 3: se verifica que el modelo proporciona un ajuste adecuado y que los supuestos básicos, implícitos en él, se satisfacen; de no cumplirse los supuestos, se determinan las modificaciones necesarias y, de hecho, se repiten las etapas anteriores hasta que la verificación indique resultados aceptables. Los supuestos se verifican sobre los residuales del modelo que deben constituirse en un proceso de ruido blanco. Por lo tanto, deben ser incorrelacionados, tener función de medias cero, de varianzas constante y estar distribuidos normalmente. Adicionalmente, deben realizarse pruebas de especificación del modelo. Guerrero (2003), realiza una buena presentación acerca de la verificación de un modelo de series temporales.
- Etapa 4: uso del modelo para los fines que el investigador tenga en mente al construirlo; dichos fines son, por lo general, de pronóstico, control, simulación o explicación del fenómeno en estudio.

En consecuencia, la construcción de modelos de series temporales según la metodología de Box y Jenkins es un proceso interactivo que se puede esquematizar, tal como se aprecia en la gráfica 5.

Gráfica 5. Proceso para estimación de modelos ARIMA.



Los pronósticos para valores futuros de la serie, por lo general se realizan con base en los procedimientos incluidos en los paquetes computacionales; sin embargo, la fundamentación teórica podrá consultarse en los textos de Guerrero (2003) o Peña (2010).

1.5. Estructura fractal de series temporales

Un fractal es un objeto semigeométrico cuya estructura básica es fragmentada o irregular y se repite a diferentes escalas. Este elemento de la naturaleza puede ser descrito mediante la geometría fractal (Barnsley, 1988; Mandelbrot, 1985; Mandelbrot, 1993). Los fractales poseen una dimensión no entera y que pueden superar a su dimensión topológica (Burgos y Pérez, 1999).

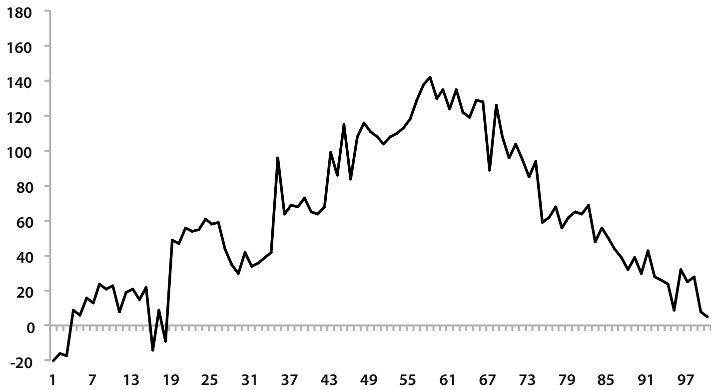
1.5.1. Movimiento browniano

El cambio temporal de una variable aleatoria es llamado "paseo aleatorio" o "movimiento browniano", si este varía de modo incierto, se satisfacen las siguientes condiciones:

- El movimiento en cualquier instante de tiempo es independiente del movimiento en otro momento, Esto sucede si no tiene "memoria" del movimiento que ha experimentado.

- El cambio esperado de posición en el tiempo es cero. Es decir, no tiene una dirección "preferida" ni patrón de movimiento.
- La distancia esperada del cambio es mayor que cero. En otras palabras, no permanece inmóvil.

Gráfica 6. Paseo aleatorio o movimiento browniano.



1.5.2. Distribuciones de probabilidad

1.5.2.1. Distribuciones estables

Una distribución es estable si al obtener dos versiones reescaladas de la distribución su producto produce otra distribución que resulta ser también una versión reescalada de la original. En otras palabras, *f* es una distribución estable si para A y B existe C, tal que:

$$f\left(x/A\right) * f\left(x/B\right) = f\left(x/C\right)$$

La expresión "estable" se utiliza porque cuando múltiples efectos son descritos por esta distribución el efecto neto o resultante también es descrito por ella. Por lo tanto, estas son las únicas distribuciones que pueden "sobrevivir" en sistemas configurados por la contribución de numerosos factores. La curva gaussiana es un buen ejemplo de una distribución estable, las cuales pueden ser parametrizadas por cuatro parámetros que, al ser ajustados, pueden obtener la caracterización completa de la distribución estable. Desafortunadamente, excepto para dos o tres casos especiales (entre ellos el gaussiano), ninguna de estas distribuciones puede ser expresada mediante una forma analítica.

1.5.2.2. Distribuciones fractales

Las distribuciones fractales tienen la propiedad de que, cuando su correspondiente serie temporal es graficada, esta tiene una dimensión fractal. La serie temporal producida por una distribución fractal es (estadísticamente) independiente de la escala. Por ello, este es generalmente el caso presentado en distribuciones estables, con la excepción de la distribución gaussiana.

1.5.2.3. Movimiento browniano fraccional

Este movimiento se presenta en series temporales que obedecen una "$1/f^{-b}$" regla. Esto se da cuando su serie de Fourier decrece a una tasa que es proporcional a $1/f^{-b}$, donde f es la frecuencia de la serie temporal (variable independiente en el espacio de Fourier) y b es una constante. Interesantes estudios han mostrado que las distribuciones estables pueden ser generadas por medio de estos movimientos. Así, estas ideas corresponden al mismo género de series temporales.

1.5.3. Análisis R/S (rango estandarizado o reescalado)

El análisis R/S es una de las más formidables y robustas maneras de analizar datos que, se sospecha, provienen de realizaciones no gaussianas. El análisis puede usarse para cualquier conjunto de datos que varíe en el tiempo (González y Guerrero, 2001). Los principios que soportan este análisis son:

- Los datos son afectados por tendencias previas de corto y/o largo plazo. Luego, cada dato puede no ser independiente de trayectorias previas.
- En el tiempo, los efectos de esas tendencias pueden producir pequeñas o grandes fluctuaciones que originan un movimiento browniano.

El propósito de esta, y de las siguientes secciones, es definir un análisis que pueda extraer de buena forma la información acerca de la "memoria" de la serie. Los elementos básicos necesarios para realizar el análisis son: el índice de escala temporal, el rango y el rango estandarizado.

1.5.3.1. Índice de escala temporal, n

El análisis R/S utiliza el primer principio mediante la definición de un parámetro "*n*", que es un cierto índice de escala temporal que divide la serie en periodos de longitud *n*. Para cada *n* los datos están fragmentados en grupos adyacentes de tamaño *n*, el análisis está enfocado sobre cada uno de estos grupos. Luego, por la organización de dichos grupos, el índice *n* mide las propiedades de los datos que ocurren sobre una escala temporal característica de longitud *n*. Por lo tanto, el índice puede ser utilizado para mostrar la memoria del sistema sobre periodos de tiempo de longitud *n* (en ocasiones se utiliza *t* como índice de escala).

1.5.3.2. Rango

En general, el rango está definido como la máxima distancia entre dos puntos en un conjunto. Para un sistema que cambia en el tiempo, es la distancia entre los dos puntos más distantes cubiertos en un periodo. Así, este mide cuánta distancia ha cubierto una variable en un lapso dado. La medida característica de un movimiento browniano consiste en el incremento de su rango en proporción a la raíz cuadrada del tiempo.

El análisis R/S utiliza el segundo principio para comparar el rango de una variable con el rango de un movimiento browniano preestablecido, con el fin de evaluar su comportamiento.

1.5.3.3. Rango estandarizado

Es necesario hacer un refinamiento final al rango mediante la división de este por la desviación estándar de las observaciones en el tiempo. Se obtiene así el rango estandarizado “R/S”, también llamado rango normalizado. Sin esta normalización es imposible comparar diferentes orígenes de series temporales.

Estas tres definiciones constituyen el fundamento intuitivo del análisis R/S. En este análisis se grafica el logaritmo del R/S como una función del índice de escala temporal (n). Esta gráfica muestra una “potencia-ley” que relaciona el rango normalizado con la variación de la escala temporal. Esta técnica se utiliza para extraer dos importantes piezas de información:

- El exponente Hurts que describe las características fractales de la serie temporal y caracteriza la persistencia de dicha serie. Es un importante elemento relativo al comportamiento de la serie en el corto plazo.
- El periodo promedio de ciclos no periódicos puede ser reconocido por una variación parecida del análisis R/S, llamada V–análisis, el cual identifica los rasgos críticos del comportamiento de la serie a largo plazo.

1.5.4. El exponente Hurst

Albert Einstein realizó un estudio extensivo sobre la noción de ruido browniano que recayó en la modelación de paseos aleatorios de partículas dentro de un estudio estadístico. El físico descubrió que la distancia cubierta por una partícula aleatoria que sufrió colisiones está directamente relacionada con la raíz cuadrada del tiempo. Si se denota R como la distancia cubierta, k como una constante de proporcionalidad y T como el índice utilizado para indicar el tiempo, se obtiene la expresión (Quintero y Ruiz, 2011):

$$R = k * \sqrt{T}$$

Ahora bien, utilizando el análisis del rango estandarizado, Hurts sugiere una normalización del concepto de ruido browniano que puede ser aplicado a series temporales. Esta ecuación general es:

$$R/S = k * n^H$$

Donde: R/S es el rango estandarizado (Rango/Desviación estándar), n es el índice utilizado para denotar el número de observaciones por intervalo de tiempo, k es alguna constante para la serie temporal y H se define como el exponente Hurts. Con esta ley general, se presentan las bases para generalizar la noción de ruido browniano al concepto de ruido browniano fractal (fraccional), el cual existe siempre y cuando el exponente Hurts esté bien definido.

El valor R/S es una fracción adimensional obtenida al dividir el rango por la desviación estándar de las observaciones. Esta nueva variable (escala) equivale al valor del índice temporal ajustado por una potencia cuyo valor es H. Este es el punto básico para el análisis de Hurts: al reescalar, pueden compararse diversos valores observados en el tiempo, incluyendo periodos de tiempo que separados por muchos años. Adicionalmente, este tipo de análisis es utilizado para describir series temporales que no poseen una escala característica.

La ecuación general de Hurts posee una característica de la geometría fractal: su escala está en concordancia con una ley de potencia. En el pulmón, por ejemplo, el tamaño de cada ramificación decrece en una escala acorde a una ley de potencia inversa. Sin embargo, la función R/S crece como una potencia de H. El valor de H está en el intervalo cerrado [0,1]. Ahora bien, si H=0,5 el sistema sigue una trayectoria aleatoria, recuperando el escenario original de un movimiento browniano. En caso contrario, las observaciones no son independientes y cada una lleva consigo una “memoria” de eventos que le han precedido.

Se pueden distinguir entonces tres casos:

- H=0,5: serie independiente (ruido browniano o movimiento Browniano). Los valores observados en la serie son independientes de los valores del pasado. La serie es un paseo aleatorio.
- $0 \leq H < 0,5$: serie antipersistente (ruido rosado). El sistema está cubriendo menos distancia que un paseo aleatorio. Así, tiene la tendencia de regresarse frecuentemente sobre sí misma. Si incrementa es muy probable que decrezca en el próximo periodo. Si decrece, es muy probable que aumente. Este efecto se explica en términos del efecto espejo, la derivada de una serie temporal de ruido negro es un ruido rosado, al igual que la derivada de un ruido marrón es un ruido blanco. Luego, puesto que la volatilidad de

mercados puede entenderse como la derivada de una serie temporal ruido negro, esta es un ruido rosado.

- $0,5<H\leq 1$: serie persistente (ruido negro). Esta serie cubre más distancia que un paseo aleatorio. Así, si una serie incrementa en un lapso es muy probable que sufra un aumento en el periodo siguiente. A este comportamiento generalmente se le conoce como el efecto José, en este se refleja la tendencia de tener "siete años" de fortuna seguidos de siete años de hambre. Tales series también tienen el potencial para catástrofes imprevistas, conocidas como el efecto Noé.

Por otro lado, el exponente Hurts es una estadística robusta que tiene las siguientes propiedades:

- Posee una medida útil para distribuciones fractales. No hay una escala de tiempo característica en tales distribuciones.
- Las siguientes afirmaciones son equivalentes para series temporales:
  - » El exponente está bien definido para la serie temporal.
  - » La serie temporal presenta un movimiento browniano fraccional.
  - » La distribución de probabilidad es estable.
  - » La pendiente de la gráfica de log(R/S) en función de log(n) es constante.
- 1/H es la dimensión fractal del espacio de probabilidades. Note que un paseo aleatorio tiene una dimensión fractal de 1/0,5=2.
- 2-H es la dimensión fractal de la serie temporal.
- 2*H+1 es la tasa a la cual decrece la serie de Fourier. Esto significa que los coeficientes de Fourier decrecen proporcionalmente a $1/f^{(2*H+1)}$.
- El exponente puede estimarse a partir del conocimiento de la pendiente de la gráfica de log(R/S) contra log(n), de la siguiente manera:

$$\log\left(R/S\right)=\log\left(k*n^{H}\right)=\log\left(k\right)+H*\log\left(n\right)$$

- Si no hay largos periodos de memoria, las perturbaciones de los datos no afectan la estimación de H. Sin embargo, al destruir la estructura de aleatoriedad de los datos, la estimación de H podría ser mucho menor. Por lo tanto, el exponente es una buena herramienta de la "memoria" del sistema.
- Se ha demostrado que la varianza de H es 1/(n*t), donde n es el índice de la escala temporal y t es la cantidad total de tiempo. Luego, altos valores de n reducen la incertidumbre en la estimación de H. Así, para estadísticas fractales, no se necesitan más observaciones, lo que se precisa es una larga serie temporal.

1.5.5. Ciclos no periódicos y V-análisis

1.5.5.1. Ciclos no periódicos

Un ciclo no periódico es una generalización natural del ciclo periódico. Una serie senoidal tiene un periodo fijo de 2π. Para series temporales aleatorias frecuentemente hay tendencia hacia el comportamiento periódico; no obstante, es posible que el ciclo sea determinado en forma aleatoria en vez de estacionaria.

Así, en lugar de tener un periodo estacionario fijo, por ejemplo: 2π, este varía para cada fase de acuerdo con alguna distribución aleatoria, la cual, en algunos casos, tiene una forma gaussiana; de modo que tiene bien definida la media y la varianza. Si no, entonces se dice que la serie temporal contiene ciclos no periódicos, generalmente, también se dice ello si tiene: una media periódica y una desviación estándar esperada en ese periodo para cada media.

Este requerimiento no es trivial, un movimiento browniano fraccional no cumple estos requerimientos, aun cuando tiende a oscilar entre altos y bajos valores. No tiene una media periódica, por lo tanto no contiene ciclos no periódicos. Por esta razón, Mandelbrot (1993) habla de "ciclos sin media" al referirse a distribuciones fractales; sin embargo, existen algunos ciclos no periódicos que no son caracterizados como movimientos brownianos fraccionarios (o fractales).

Usando el análisis R/S puede observarse que, en el corto plazo, la serie tiene bien definido el exponente Hurts, por ello parece ser un movimiento browniano fraccional. Luego, en el corto plazo, probablemente no es posible definir una serie cíclica. Sin embargo, a largo plazo, la serie temporal puede tener un comportamiento diferente, la diferencia puede ser observada definiendo la estadística V.

1.5.5.2. La estadística V

La estadística V se define así:

$$V = \frac{R/S}{\sqrt{n}}$$

Es muy similar a la estadística R/S, excepto que:

- El valor R/S es utilizado en el eje y, en lugar de su logaritmo.
- La estadística está dividida por la raíz cuadrada de n, así que el movimiento browniano tendría una pendiente bastante baja.

El eje x, al igual que en el análisis R/S, está definido por el logaritmo del índice de escala temporal. Esta variable se escoge de forma tal que permita describir comportamientos de la serie ocurridos en una escala de tiempo característica de tamaño *n*. Un período es un buen ejemplo de tal característica. Así, se espera intuitivamente que el análisis R/S sea apropiado para describir ciclos relevantes en una serie temporal.

Para evidenciar esto, considere un movimiento browniano fraccional, este no contiene ciclos, pero tiene una pendiente constante en la gráfica R/S. Luego, al menos en este caso, el análisis R/S permitirá reconocer la ausencia de comportamientos cíclicos. Por lo tanto, al menos en un primer vistazo, la estadística R/S hará distinguir entre series temporales cíclicas y no cíclicas. La estadística V se escoge simplemente para amplificar posibles cambios repentinos que se presenten en la gráfica R/S, reflejando su comportamiento cíclico.